

プレート間境界付近における運動(1)

藤 縄 幸 雄*

国立防災科学技術センター

Motions in the Boundary Layers between Two Plates

By

Yukio Fujinawa

National Research Center for Disaster Prevention, Japan

Abstract

Dynamic processes in the gouge region between two plates in tectonical sense are studied to investigate mechanisms of earthquake occurrence. Material is assumed to obey the constitutive equation of second-order Rivlin-Ericksen type. The Couette flow is shown to be unstable in the range $\Delta p < 3, R = 1, 10^{-5}, 10^{-10}, -M = 1, 10^5, 10^{10}$ where $\Delta p, R,$ and M are nondimensional pressure gradient, Reynolds number and elastic parameter, respectively.

1. はじめに

地震は、プレートテクトニクスの言葉でいうプレートの境界部で大部分起きている。ここでの関心は、二つのプレートの境界付近の運動がいかなるものであり、ためにいかなる応力状態が生起し、どのように地震が発生するか、そしてその前兆現象があるとすればいかなるものであるかを解明することである。もちろん、このように大きな問題が一挙に解明されるものでなく、ここではその問題のごく一部であるクリープ状の運動の性質について、その応力状態、クリープ運動の構成方程式に対する依存性、運動の安定性などを論じるものである。

2. 問題の定式化

太平洋プレートとアジアプレートが会合し、もぐり込んでいる場所、いわゆる深発地震帯に多くの地震が発生している。

我々は、プレートとプレートとの間の境界付近の地殻、又は上部マントルの運動を調べようとしているわけであるが、なるべく簡単でかつ地震の問題に関連する状況設定として、深

* 第2研究部地殻変動研究室

発地震面の近辺を取り上げようと思う。地震の活動の研究結果からすると、深発地震面上で一様に地震が起きているのではなく、深くなるに従ってその活動が減少することが知られているが、ここではそのようなプレートの進行方向の非一様性を考えず深発地震面の走向方向には一様なモデルを採る。

また、地下深部では、様々な化学的な反応を含めた熱力学的反応が重要な役割を果たしていると推測されるが、それも無視し、単に力学的な過程のみを考慮する。将来は、この無視された効果を取り入れることにより、より現実に近いモデルを作りあげることができるであろう。

力学的性質の相異なる二つのプレートが接しているという状況を考える場合には、接触面の法線方向の無限遠ではそれぞれのプレートの固有の速さを与えるという境界条件が与えられる。ここでは、その駆動の原因には立入らず、マントル対流の可能性をあげるにとどめよう。よって接触面の両側には二つの境界層ができることになる。その境界層の運動あるいは接触面を含めたこれら境界層における不連続な運動（地震）を研究するのが、この論稿の最終的な目的である。

二つの弾性体としてのプレートの間には遷移層（gouge）が存在することが十分考えられる。両プレートが異なる速度で運動しているとき、その gouge 内でどのような運動が発生し、そこでの地震がどのようなときにどのように起きるものであろうか。問題の簡単さから言って、二つの境界層の問題を扱うより後者の方が取り扱い易いので、ここでは、状況設定を平行板（プレート）の運動に駆動される流れ、いわゆる Couette の流れを考えることにする。たとえば、速度 U_a のアジアプレートと速度 U_p の太平洋プレートにはさまった幅 $2b$ の領域を設定するわけである。

境界面内に x_1 , x_2 軸を取り、 x_1 軸をプレートの運動の方向とし（ここではプレートは同一の方向に進むとしている）、 x_2 軸は x_1 軸に垂直にとる（図1）。 $-b \leq x_2 \leq b$ が gouge の領域である。 x_3 軸は、 x_1 x_2 面に垂直にとる。 x_1 軸を適当に座標変換することによって、アジアプレートと太平洋プレートの速さが同じ (U_0) で逆向きに進行しているとする事ができる。

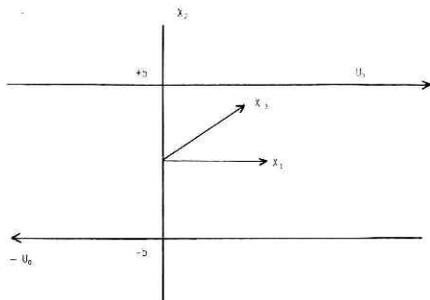


図1 採用した座標系
Fig. 1 Coordinates taken

流れを u_i ($i=1, 2, 3$), ストレステンソルを σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) とすると、場の方程式は、 ρ を密度として、

$$\text{(質量保存)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u_i)_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$\text{(運動量保存)} \quad \rho \frac{du_i}{dt} = \sigma_{ij,j} \quad (2)$$

となる。ここに、 d/dt は全微分であり、カンマはそれ以後の指数の空間方向での微分を表わ

すのは通常どおりである。外力は我々の採用したモデルでは考えない。

場方程式を閉じさせるためには、ストレス σ_{ij} を変位に関係づける必要がある。すなわち構成方程式を書き下す必要がある。物体の運動を記述する際、最も問題をはらむものの一つは、構成方程式を決定することにある。構成方程式を決定する方法として魅力的なものに、非可逆統計力学的手法によってミクロな構造・運動から演繹するものが考えられるが、地球物理学的物体に適用するためには、地殻や上部マントルにおいてすら当のミクロな構造自体がまだまだ不明であるから、そのアプローチは時期尚早としてよいだろう。戦後の高分子科学の発展は、理想物質からはずれる物体の振舞いについての知識を集積してきた。構成方程式を求めるためには、物体の運動から理想物体 (Newton 体, Hooke 体, St. Venant 体) を組合せて作り上げてくる方法が有力なものとして取り上げられていた。しかし、地殻又はマントルを構成する物質の場合、サンプルすること (scale を考えた上での) の困難さ、または不可能性を考えると、構成方程式を決定することはなかなか大変なことである。しかも、実際の運動自体が遅々たるものであって、流れの場を基にして推測することは例外を除いてできない。流れの結果としての運動の痕跡を、しかも地球の表面においてのみ知ることができるだけである。

構成方程式の導き方には、別の方法もある。それはかなり一般的に受け入れられる仮定を基にして求めるものである (Rvlin and Sawyers, 1971)。連続体が simple, incompressible かつ isotropic の時には、応力テンソル σ_{ij} は、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu A_{ij}^{(1)} + \beta A_{ik}^{(1)} A_{kj}^{(1)} + \sigma A_{ij}^{(2)} + \dots \quad (3)$$

と書ける。ここに、 p は圧力、 μ は粘性率、 β は cross-viscosity に関するパラメーターであり、 γ は弾性効果に関するパラメーターである。 $A_{ij}^{(l)}$ は、 l 次の Rivlin-Ericksen のテンソルといい、例えば、

$$A_{ij}^{(1)} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (4a)$$

$$A_{ij}^{(2)} = a_{i,j} + a_{j,i} + 2u_{m,i}u_{m,j} \quad (4b)$$

である。ここに a_i は加速度である、

$$a_i = \frac{du_i}{dt}$$

境界条件としては、プレート面において non-slip の条件、

$$u_i = 0, \text{ at } x_2 = \pm b \quad (5)$$

を課す。この条件を採用するに確たる背景があるわけではなく、より一般的な条件を課すべきかも知れない。しかし、その条件は、物体の構成方程式あるいは、それを作り上げているパラメーターの非一様性に依存しているので、一様な物体を考えている本モデルの中では、粘性流体の場合と同じ境界条件を採用した。

3. 流速の分布

定常平行流について論じる。\$x_1\$ 軸方向のみに流れ\$U\$があり、しかもそれが\$x_1\$方向に一様とする、

$$(u_i) = (U(x_2), 0, 0)$$

このとき、Rivlin-Ericksen のテンソル \$A^{(1)}, A^{(2)}\$ は、

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & U' & 0 \\ U' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2U'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、ストレス \$\sigma_{ij}\$ は、

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -\bar{p} + \beta U'^2 & \mu U' & 0 \\ \mu U' & -p + (\beta + 2\gamma)U'^2 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

となるので、運動方程式は、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \mu \frac{d^2 U}{dx_2^2} &= 0 \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} (\beta + 2\sigma)U'^2 &= 0 \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

となる。ただし、\$U' = dU/dx_2\$ である。これらの式から、

$$\bar{p} = (\beta + 2\gamma) U'^2 + p_0(x_1) \tag{7a}$$

$$\mu \frac{d^2 U}{dx_2^2} = \frac{dp_0}{dx_1} = \alpha \tag{7b}$$

となる。\$\alpha\$ が圧力勾配であるので、流れの分布は、elasticity, cross-viscosity に関係なく、粘性流体の場合と同じである。もっともこれは、2次の Rivlin-Ericksen 体の場合であり、3次、4次の構成方程式の場合には、粘性流体の場合の流速分布とは違いがでてくる。

流速の分布を無次元化パラメーター \$U_0, b\$ を用いて表わすと、

$$U^* = U/U_0, \quad x_2^* = x_2/b, \quad \alpha^* = \frac{b^2}{2\mu U_0} \left(-\frac{dp_0}{dx_1} \right)$$

$$U^* = x_2^{*2} + \alpha^* x_2^*(1 - x_2^*)$$

となるのはよく知られている。

応力の成分は、elasticity, cross-viscosity のために、Newton 体の場合と違って来るが、その normal stress の差 \$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_3\$ は、

$$\Delta\sigma_1 = 2\gamma U'^2$$

$$\Delta\sigma_3 = -(\beta + 2\gamma)U'^2$$

となっている。これらの違いが岩石の破壊条件、断層面の slip の条件の違いに反映 すると 思われる、しかし、ここでは、この点については議論をしない。

4. 流れの安定性

粘弾性体の安定性については、Gupta (1967) が論じているので、基本的にはその手法を 使う。

$$u_1 = U + u'_1$$

$$u = u'_2$$

$$p = \bar{p} + p'$$

とし、連続の式、運動量の式から、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + U''u_2 = 4M \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\left(\frac{1}{MR} + \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - U' \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \\ + M \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) \left[\left(\frac{1}{MR} + \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + 2U' \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + U''u_2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。ここに、

$$R = \frac{bU_0}{\nu}, \quad M = \frac{\gamma}{b^2\rho}$$

であり、 R はレイノルズ数、 M は弾性効果のパラメーターの無次元数である。渦度方程式に は表われなかったが、この他 cross-viscosity に関するパラメーター $N = 2\beta/(b^2\rho)$ が運動量 の式には出てくる。

流れ関数 ϕ を、

$$u_1' = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \quad u_2' = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

で導入し、さらに、固有モード

$$\phi = \phi(x_2) e^{ik(x_1 - ct)}$$

を考える。

Newton 流体の Couette の流れは、レイノルズ数 R の全域にわたって安定であることが 知られており (例えば、巽・後藤, 1977), Gupta (1967) は二次の Rivlin-Ericksen 体では elastic な効果によって Poiseuille の流れが不安定化すると述べている。しかし、彼の場合 は実質的には平均流がゼロのときの安定問題となっている。

Orr-Sommerfeld の方程式は、

$$(U - c) (\phi'' - k^2\phi) - U''\phi = \left\{ \frac{1}{ikR} + M(U - c) \right\} (\phi^{(4)} - 2k^2\phi^{(2)} + k^4\phi) \quad (10)$$

となる。ここに ' は x_2 に関する微分である。この方程式に対する境界条件が、

$$\phi(\pm 1) = 0, \quad \phi'(\pm 1) = 0 \quad (11)$$

となるが、この境界値問題を解いて固有値 c の虚数部 c_i が正のときに不安定、 c_i が負のと

きに安定となり、中立曲線は $c_i=0$ で与えられる。

固有値問題を直交関数展開法によって解く。 ϕ を

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n \quad (12)$$

と展開するのであるが、直交関数としては、元の方程式の固有関数に近いものを採用する。式(10)で $U=0$ とおいた式

$$\phi^{(4)} - 2k^2 \phi^{(2)} + k^4 \phi = \frac{-ikRc}{1-ikRMc} (\phi'' - k^2 \phi) = -\lambda (\phi'' - k^2 \phi) \quad (13)$$

で境界条件(11)を満たす固有関数 ϕ_n を使う (巽・後藤; 1978 を参照)。平均流の分布 U が偶関数の場合には、軸 $y=0$ (便宜上 x_2 を y とする) に対して、偶なモードが奇なモードに比べてより不安定であることが知られているが、一般の Couette の流れの場合には、平均流速分布は偶でも奇でもない。固有関数として偶モード $\phi_n^{(e)}$ と、奇モード $\phi_n^{(o)}$ をとり、それぞれの場合に対して、固有値 c を求める。

偶モードの固有関数 $\phi_n^{(e)}$ は、

$$\phi_n^{(e)} = \cos \beta_n y - \frac{\cos \beta_n}{\cosh k} \cosh ky \quad (14)$$

であることが容易にわかる。ここに β_n は固有値であり、

$$\beta_n \tan \beta_n + k \tanh k = 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (15)$$

から求まる。奇モードの固有関数 $\phi_n^{(o)}$ は、

$$\phi_n^{(o)} = \sin \delta_n y - \frac{\sin \delta_n}{\sinh k} \sinh ky \quad (16)$$

であり、 δ_n は、

$$\delta_n \cot \delta_n - k \coth k = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

を満たす。 β_n, δ_n の値は数値計算手法によって上の方程式を解いて求めた。

式(13)に ϕ_n を代入し、 ϕ_m を掛けて積分すると $\phi_n^{(e)}$ 又は $\phi_n^{(o)}$ は、次のような直交関係を満たすことが得られる。

$$\int_{-1}^{+1} (\phi_n' \phi_m' + k^2 \phi_n \phi_m) dy = \mu_n \delta_{nm}, \quad (17)$$

$$\mu_n = \begin{cases} (\beta_n^2 + k^2) \left(1 + \frac{\sin 2\beta_n}{2\beta_n}\right) & \dots \dots \text{even} \\ (\delta_n^2 + k^2) \left(1 - \frac{\sin 2\delta_n}{2\delta_n}\right) & \dots \dots \text{odd} \end{cases}$$

永年式は、展開(12)を元の Orr-Sommerfeld の方程式に適用し、 ϕ_n を乗じて積分して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \{a_{nm} - (c - \frac{1-ikRMc}{ikR} \lambda_m) \mu_n \delta_{nm}\} = 0, \quad m=1, 2, \dots \quad (18)$$

となる。ここに a_{nm} は、

$$a_{nm} = (1 - 2Mk^2) \langle m | U | n^{(2)} \rangle - k^2 (1 + Mk^2) \langle m | U | n \rangle - \langle m | U'' | n \rangle - \langle m | U | n^{(4)} \rangle \quad (19)$$

であり,

$$U = y + \Delta p(1 - y^2)$$

$$\langle m | G | n^{(c)} \rangle = \int_{-1}^{+1} \phi_m G \phi_n^{(c)} \cdot dy$$

である. 上の1次方程式が trivial な解以外の解を持つための条件は,

$$\left| \frac{1}{(1 + M\lambda_n)} \left(\frac{1}{\mu_n} a_{nm} + \frac{\lambda_n}{ikR} \delta_{nm} \right) - c \delta_{nm} \right| = 0 \quad (20)$$

となり, この方程式を解くことにより, 固有値 c が定まる.

圧力傾度 Δp がゼロのときには, v が奇となるから, 上の行列要素 $a_{nm} = 0$ となり, 方程式 (20) がすぐ解けて,

$$c_m = -\frac{i}{kR} \frac{\lambda_m}{1 + M\lambda_m} \quad (21)$$

となる. よって

$$I_m(c_m) = \frac{1}{kR} \frac{\lambda_m}{1 + M\lambda_m}$$

と与えられる. $M < 0$ となる (Gupta, 1968) が $|M| \ll 1$ であっても, λ_m が m と共に大きくなるので, 必ず,

$$I_m(c_m) > 0$$

となる N がある. すなわち, この場合には流れは不安定ということになる. この結果は当然ながら Gupta (1967) と同じである.

さて $\Delta p \neq 0$ のときには, matrix 要素 a_{nm} は少々複雑であるが, 初等関数で表示できる. 用いる固有関数の数 n を増していった, $I_m(c_m)$ の最大のものが安定するまで, 固有値を求め続け, そのとき得られるものが固有値 c である. 表1は圧力勾配 Δp , elastic パラメーター M , レイノルズ数 R , 波数 k を与えて求めた固有値の虚数部である. 計算の結果

$$\Delta p = +3 \sim -3$$

$$|M| = 1, 10^5, 10^{10}$$

$$R = 1, 10^{-5}, 10^{-10}$$

$$k = 0.1 \sim 1.9$$

の範囲では,

$$c_i > 0$$

であり, 流れが不安定であることが推測される. なお, even モードと odd モードの場合の c_i を比較すると, 対象としたパラメーター範囲では, やはり even モードの方が“より不安定”であることがわかった.

検 討

上で Rivlin-Ericksen の2次の構成方程式を満たす流体の Couette の流れが不安定であることが示されたわけであるが, その構成方程式について検討を行ってみよう. 微小なひず

表 1 固有値計算の例
Table. 1 Eigenvalues for some cases of non-dimensional parameters $\Delta p, M, R$.

$\Delta p = -3$	$M = -10^{10}$	$R = 10^{-15}$	1.7	6.6×10^9	6.2×10^9
k	even	odd	1.9	5.9×10^9	5.5×10^9
0.1	1.0×10^6	1.0×10^6			
$\}$	$\}$	$\}$	$\Delta p = -3$	$M = -1$	$R = 1$
1.9	5.3×10^4	5.3×10^4	k	c_i (even)	c_i (odd)
			0.1	11	10
$\Delta p = -3$	$M = -10^{10}$	$R = 10^{-10}$	0.3	3.7	3.4
k	c_i (even)		0.5	2.2	2.1
0.1	15.2		0.7	1.6	1.5
0.3	8.92		0.9	1.3	1.2
0.5	7.62		1.1	1.2	1.0
			1.3	1.1	0.86
$\Delta p = -3$	$M = -1$	$R = 10^{-10}$	1.5	1.0	0.77
k	c_i (even)	c_i (odd)	1.7	0.89	0.68
0.1	1.1×10^{11}	1.1×10^{11}	1.9	0.81	0.71
0.3	3.7×10^{10}	3.5×10^{10}			
0.5	2.2×10^{10}	2.1×10^{10}	$\Delta p = +3$	$M = -1$	$R = 10^{15}$
0.7	1.6×10^{10}	1.5×10^{10}	k	c_i (even)	
0.9	1.2×10^{10}	1.2×10^{10}	0.1	1.1×10^{16}	
1.1	1.0×10^{10}	9.6×10^9	$\}$	$\}$	
1.3	8.6×10^9	8.1×10^9	1.9	5.9×10^{14}	
1.5	7.5×10^9	7.0×10^9			

みの場合には、Rivlin-Ericksen の2次の構成方程式は、偏差応力テンソル σ_{ij}' で表わすと、

$$\sigma_{ij}' = (\eta_0 + \gamma \frac{\partial}{\partial t}) e_{ij} \quad (22)$$

となり、微小攪乱の形を $e^{i\omega t}$ のように時間変化をずしているので、

$$\sigma_{ij} = (\eta_0 + \gamma i\omega) e_{ij}$$

となる。簡単な考察から

$$|\omega| < |\eta_0 / \gamma|$$

でなければならない (Craik, 1968)。無次元表示すると、

$$k|c|MR < 1$$

となる。ところが、数値的に求めた固有値のいずれを使っても、

$$k|c|MR \geq 1$$

となる。すなわち、このような攪乱は現実には存在しないということである。

さて Rivlin-Encksen の構成方程式はいわゆる simple fluid の内で非線形効果を取り入れたもので、最も簡単なものであり、対称性と平均流による check によって、その有効性が調べられてきた。

しかし上に見るように、少なくとも $|Ap| < +3$, $|M| = 1 \sim 10^{10}$, $R = 1 \sim 10^{-10}$ の範囲では、妥当なものではないということになる。我々はより高次の項を考えに入れるか、あるいは線形の履歴効果を重視した、Oldroyd, Coleman and Noll 等の構成方程式を使うべきであろう。

参 考 文 献

- 1) Craik, A. D. D. (1968): A note on the static stability of an elastic-viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, **33**, 33.
- 2) Gupta, A. S. (1967): Stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, **28**, 17.
- 3) Rivlin, R. S. and K. N. Sawyers (1971): Nonlinear continuum mechanics of visco-elastic fluids. *Annual Rev. Fluid Mech.*, **3**, 117.
- 4) 巽友正・後藤金英 (1977): 流れの安定性理論, 産業図書出版株式会社.

(1980年⁶月27日 原稿受理)